UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

SEMINARIO MATEMATICO

Il giorno 28 novembre 1955 alle ore 18

presso l'Istituto Matematico il Chiar.mo Prof. Carlo Felice MANARA

Ordinario di Geometria nella Università di Modena

terrà una conferenza sul tema:

Sulla Geometria degli elementi differenziali.

La S. V. è invitata ad intervenire.

IL DIRETTORE

Argomento ricco di eleganti applicazioni e di legami con la Geometria Algebrica.

Concetto (almeno vago) di elemento differenziale è comune e fa parte di quel patrimonio di nozioni che si dànno quando si parla elementarmente di equazioni differenziali.

Interessa qui l'aspetto proiettivo del concetto e pertanto rientra nel dominio della Geometria Proiettivo Differenziale. (vedremo in seguito le proprietà diff.)

Precursori di Geometria Proiettivo differenziale:
~~Alphen~~ Halphen (in memorie del 1875, 1878 , 1880) e Mehmke (1891)

Grandi nomi nell'indirizzo che ci interessa qui
Cartan , Wilczinski , Fubini, Bortolotti, Cech , Bompiani.

Parleremo prima della Geometria dei singoli elementi differenziali : a) regolari , b) non regolari. In seguito dei gruppi di elmenti differenziali. Ci limiteremo al piano, benchè qualche ricerca si sia spinta anche negli spazi proiettivi ad un numero qualunque di dim..

I°. PROBLEMA - Rappresentazione . Esso è intimamente legato alla precisazione della "Geometria" in cui ci si vuol muovere. Esempio banale : le coppie di punti di due rette : piano, oppure Varietà di Segre ?

Se interessano solo problemi metrici o affini basta il piano; se interessano problemi proiettivi occorre la varietà di Segre che in tal caso è una quadrica di S_3, come è ben noto. Fissate due coordinate proiettive omogenee x_1, x_2 sulla prima retta, altre due analoghe y_2, y_2 sulla seconda, si ha che la Varietà di Segre èdata parametricamente da

$$X_1 = x_1 y_1 \; ; \; X_2 = x_1 y_2 \; ; \; X_3 = x_2 y_1 \; ; \; X_4 = x_2 y_2$$

essa ha la proprietà che alterando comunque con una proiettività le x (o le y) essa viene sottoposta ad una omografia del suo spazio. Tutti i suoi punti sono uguali (non ve ne sono di singolari).

In modo analogo si avrebbe la Variatà delle coppie di punti di due piani, che è una V_4^6 dello S_8

Fermiamoci pure qui per il momento perchè ciò che abbiamo detto basta per la varietà rappresentativa degli E_1. Possiamo assumere come definizione dell'E_1 (piano) la coppia punto-retta appartenentisi.

Allora i punti rappresentati da coordinate proiettive omogenee x^1, x^2, x^3, le rette da coordinate proiettive pluckeriane omogenee u_1, u_2, u_3 la varietà è rappresentata parametricamente

$$\begin{aligned} X_1^1 &= u_1 x^1 \; ; & X_1^2 &= u_1 x^2 \; ; & X_1^3 &= u_1 x^3 \\ X_2^1 &= u_2 x^1 \; ; & X_2^2 &= u_2 x^2 \; ; & X_2^3 &= u_2 x^3 \\ X_3^1 &= u_3 x^1 \; ; & X_3^2 &= u_3 x^2 \; ; & X_3^3 &= u_3 x^3 \end{aligned}$$

con la condizione di appartenenza

$$X_1^1 + X_2^2 + X_3^3 = 0$$

Essa è quindi una sezione iperpiana della varietà prodotto di due piani (uno rigato e l'altro punteggiato) : è una V_3^6 di S_7 .

Ogni equazione differenziale del I° ordine dà una superficie di questa V_3^6 , la quale risulta l'ambiente più adatto per lo studio dell'equazione differenziale, quando lo si voglia fare "in grande" e nel campo proiettivo. ESEMPIO molto semplice: dati due punti della V_3^6 , risulta determinata una opportuna sezione iperpiana che rappresenta la "organizzazione" degli E_1 del piano data dalle coniche per i due E_1 .

Ma non solo per problemi differenziali , ma anche per problemi di carattere algebrico tale Varietà risulta essere l'ambiente naturale. Esempio : la corrispondenza punto-tangenziale tra i punti di una curva algebrica piana . Esistono ricerche di Terracini che ha trovata una quartica piana notevole in cui la corrispondenza è riducibile; si conoscono altri esempi, che sono sostanzialmente quelli dati dalle curve di Klein-Lie. La trattazione generale dei casi di riducibilità risulta molto complicata ed ardua perchè non si può ricorrere al metodo dolito in Geometria Algebrica della degenerazione (nel piano) Infatti le curve hanno necessariamente delle singolarità puntuali e tangenziali obbligate e facendole variare in sistemi lineari (come luogo o come inviluppo) si sciolgono le singolarità tangentiali o puntuali.

L'ambiente oso dire "naturale " è quindi quello della V di cui sopra, nella quale si ha un modello algebrico della curva consid rata come insieme dei suoi elementi defferenziali del I° ordine .

ELEMENTI DI ORDINE SUPERIORE . Occorre anzitutto definirli, ai fini della Geometria proiettiva. Limitandoci al campo metrico la nozione è banale Cito il nome solo di Sofus Lie.
Nel campo proeitttivo occorre dare tre funzioni (coordinate omogenee proiettive x^1 x^2 x^3) che sono definite a meno di una fattore moltiplicativo qualunque e di un generico cambiamento del parametro.

Una via che si potrebbe seguire per definire un E_k <u>puntualmente regolare</u> può e sere suggerita da queste considerazioni : date due curve C e C' che passano per uno stesso punto P (regolare per entrambe) si riesce ad assegnare a P un numero intero il quale riesce indipendente dalla parametrizzazione e invariante per proiettività. Tale numero viene chiamato "ordine di contatto" . L'E_k risultarebbe la classe (o l'astratto della classe) di tutte le curve (regolari in P) e che hanno con una data un contatto precisamente delle stesso ordine.

Quando si voglia precisare analitcamente uha tale nozione , assegnando delle coordinate dell'E_k nasce una prima difficoltà che dipende dalla necessità di tener presente anche l'aspetto duale (o tangenziale) della questione, se si vuol dare la massima generalità nel campo proiettivo.

Daremo un esempio per il caso degli E_2 piani per dare l'idea della non semplicità dei problemi da risolvere per ottenere gli scopi prefissati/
Date le tre coordinate omogenee proiettive x^i (i=1,2,3) come funzioni del parametro t (funzioni che risultano definite a meno di un fattore di proporzionalità $\rho = \rho(t)$ non nullo) indichiamo con $\dot{x}^i$ le derivate. Le coordinate plückeriane della retta tangente u_i alla curva descritta dal punto P che ha le x^i come coordinate sono proporzionali ai minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^3 \end{matrix} \right\|$$

Si assumono poi un punto arbitrario z^i ed una retta arbitraria w^i e si costruiscono le espressioni

$$U = \frac{|z\, x\, \dot{x}|}{(z u)}$$

$$X = \frac{|w\, u\, \dot{u}|}{(x w)}$$

dove $(z\ u) = \sum z^i u_i$

$(x\ w) = \sum x^i w_i$

(a meno di fattori)

Si dimostra poi che U ed X non dipendono dalla scelta del punto arbitrario e della retta arbitraria w.
Allora si costruiscono le coordinate

$$
\begin{cases}
\xi^{ihkl}_{\dots j} = U\, x^i x^h x^k x^l u_j \\
\xi^{j\dots}_{\cdot ihkl} = X\, x^j u_i u_h u_k u_l
\end{cases}
$$

e si verifica che non dipendono dalla sdelta del parametro e del fattore di proporzionalità. Si contano
330 sono 90 ; si contano le relazioni che passano tra esse sono 20 Sí ha quindi una V_4^{330} appartenente ad uno spazio di dimensione 69 (Varietà di Gherardelli).

Non siamo più nelle condizione favolrevoli della varietà rappresentante gli E_1 , perchè qui abbiamo due variatà privilegiate (o singolari) che dànno gli E_2 non regolari (come luogo o come inviluppo) quelli cuspidali e quelli di flesso.

Il problmma della varietà rappresentativa è stato risolto per tutti gli E_r di un S_n e per la sua soluzione occorre mobilitare ~~tutt~~ molte risorse della Geometria Algebrica.

Questo per gli elementi regolari. Per i non regolari cioè corrispondenti a singolarità superiori alla cuspide è stato fatto qualcosa. Si sa la esistenza di invarianti e Maxia ha esaurito la ricerca metodica e la loro costruzione . non quello delle varietà rappresentative che è stato risolto solo in pochi casi.

Lo studio è interessante per la Geometria Algebrica e per altre applicazioni : mi è occorso di incontrarmi in queste questioni nello studio delle trasformazioni piane in punti non regolari.

Per lo spazio niente si sa.

GRUPPI DI ELEMENTI DIFFERENZIALI - Mi limiterò al caso piano. Si possono disntinguere (grosso modo) due tipi di questioni: quelle riguardanti gruppi di elementi differenziali aventi qualche element comune di ordine minore e quelle riguardanti gruppi di elementi sconnessi.

Esempio delle prime questioni è quello dato dal Teor. di Mehmke , che ha generato una discendenza numerosissima di teoremi riguardanti invarianti di coppie di terne ecc. nel piano e nello spazio. Qui il terreno è stato arato in tutti i sensi e per necessità, perchè a questi invarianti sono stati ridotti anche gli invarianti di elementi singoli di ordine superiore; per es. a invarianti di questo tipo sono stati ricondotti il primo invariante infintesimo (arco di curva proiettivo) e finito (curvatura proiettiva).

Più interessanti sono le proprietà relative ad elementi non aventi connessione tra loro.

(1783) Capostipite si può considerare il cosiddetto Teorema di Reiss che dà la condizione necessaria e sufficiente perchè n E_2 aventi i centri allineat appartengano ad una stessa curva algebrica. Detti P_i i punti appartenenti alla retta r, detti α_i gli angoli che la r forma con le tangenti e dette c_i le curvature, si ha che la somma

$$\sum \frac{c_i}{\operatorname{sen}^3 \alpha_i} = 0$$

Il Teorema è del 1837 e fu riscoperto varie volte in seguito ; sopratutto si vide che la sua sostanza è proiettiva, malgrado noi ne abbiamo qui data la formulazione originaria che fa intervenire concetti metrici.

Altro capostipite è il cosiddetto "invariante di Study-Bompiani " di una coppia di E_2 . Esso si può definire così/ ....

Il Bompiani ne diede una applicazione ed una innterpretazione ~~xxxx~~ mediante la Geometria della Equazione di Laplace, mediante gli invarianti della equazione stessa.

Quando si passa alle terne il problema divente un poco più complicato. Distinguere le terne genericehe da quelle particolari . ...